Polynômes et fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

M2 – Chapitre 3

I. Définitions

1. Polynôme de $\mathbb{K}[X]$

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{K}$) est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Il se note $\sum_k a_k X^k$

2. Degré d'un polynôme

$P \neq 0 \Leftrightarrow d°P = \text{rang du coefficient dominant}$
$P = 0 \Leftrightarrow d°P = -\infty$ (convention)

3. Polynôme unitaire

Un polynôme est unitaire si son coefficient dominant est 1.

II. Anneau des polynômes

1. Relation vis-à-vis du degré

$$\boxed{\begin{array}{c} d°(P+Q) = \mathrm{Max}(d°P\,;d°Q) \\ d°(P.Q) = d°P + d°Q \end{array}}$$

2. Régularité

$$PQ = PR \Leftrightarrow Q = R$$

3. Division euclidienne

Soient A et B deux polynômes ($B \neq 0$)
$\exists!\,(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$
$\boxed{A = BQ + R \qquad d°R < d°B}$

4. Polynôme dérivé

$$\left(\sum_k a_k X^k\right)' = \sum_{k\geq 1} k a_k X^{k-1}$$
$$(P+Q)' = P' + Q'$$
$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

III. Racines d'un polynôme

1. Égalité de Taylor

$$\boxed{P = \sum_k \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}$$

2. Racines d'ordre m d'un polynôme

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P polynôme
$\boxed{P \text{ factorisable par } (X-a)^m \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0}$

a est racine d'ordre m du polynôme quand $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)} \neq 0$

IV. Décomposition / factorisation des polynômes

1. Définition du PGCD ($\wedge$)

Soient A et B deux polynômes non simultanément nuls.

$\exists!\, P_0$ polynôme unitaire $t.q.$ $\boxed{I = \underset{(U,V)\in\mathbb{K}[X]^2}{\{AU+BV\}} = \underset{W\in\mathbb{K}[X]}{\{P_0W\}} = P_0\mathbb{K}[X]}$

Donc :

- $\exists (U,V) \in \mathbb{K}[X]\ t.q.\ \boxed{AU + BV = P_0}$
- P_0 est appelé $PGCD$ de A et B
- $\boxed{P_0|A \text{ et } P_0|B}$
- $Q|A$ et $Q|B \Rightarrow Q|P_0$

2. Théorème de Bézout

A et B premiers entre eux $\Leftrightarrow$ $\boxed{A \wedge B = 1 \Leftrightarrow AU + BV = 1}$

3. Théorème de Gauss

$$\boxed{A|BC \text{ et } A \wedge B = 1 \Rightarrow A|C}$$

4. Polynômes irréductibles

Soit P polynôme non constant

P irréductible $\Leftrightarrow \forall\,(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2, P = AB \Rightarrow d°A = 0$ ou $d°B = 0$

$\Leftrightarrow P$ factorisable uniquement par des polynômes constants

- $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible $\Leftrightarrow d°P = 1$ ou $d°P = 2$ et $\Delta < 0$
- $P \in \mathbb{C}[X]$ irréductible $\Leftrightarrow d°P = 1$
- Tout polynôme est produit de facteurs irréductibles

V. Définition et propriétés de $\mathbb{K}(X)$

$(P,Q)R(P',Q') \Leftrightarrow PQ' = P'Q$ $\qquad \overline{(P,Q)}$ se note $\dfrac{P}{Q}$ $\qquad \boxed{d°\dfrac{P}{Q} = d°P - d°Q}$

Toute fraction admet une unique décomposition en E polynôme et F fraction de degré négatif :

$$\boxed{\frac{P}{Q} = \underbrace{E}_{\in\,\mathbb{K}[X]} + \underbrace{F}_{\in\mathbb{K}(X)\text{ et } d°F<0}}$$

VI. Décomposition polaire d'une fraction rationnelle

$$\boxed{\frac{A}{\prod_{k=0}^{n} P_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{P_k}}$$

$\mathrm{P_k}$ premiers entre eux, $\mathrm{A_k}$ polynômes à déterminer

$$\boxed{\frac{A}{P^n} = E + \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{P^k}}$$

$\mathrm{A_k}$ polynômes à déterminer $\underline{d°A_k < d°P}$